

放射線計測における統計

2020年5月20日

高橋 正二

課題

1. A、B地区の杉の木の放射能濃度を3本ずつ測定して次の結果を得た。B地区のスギの方が低いと言えるか？

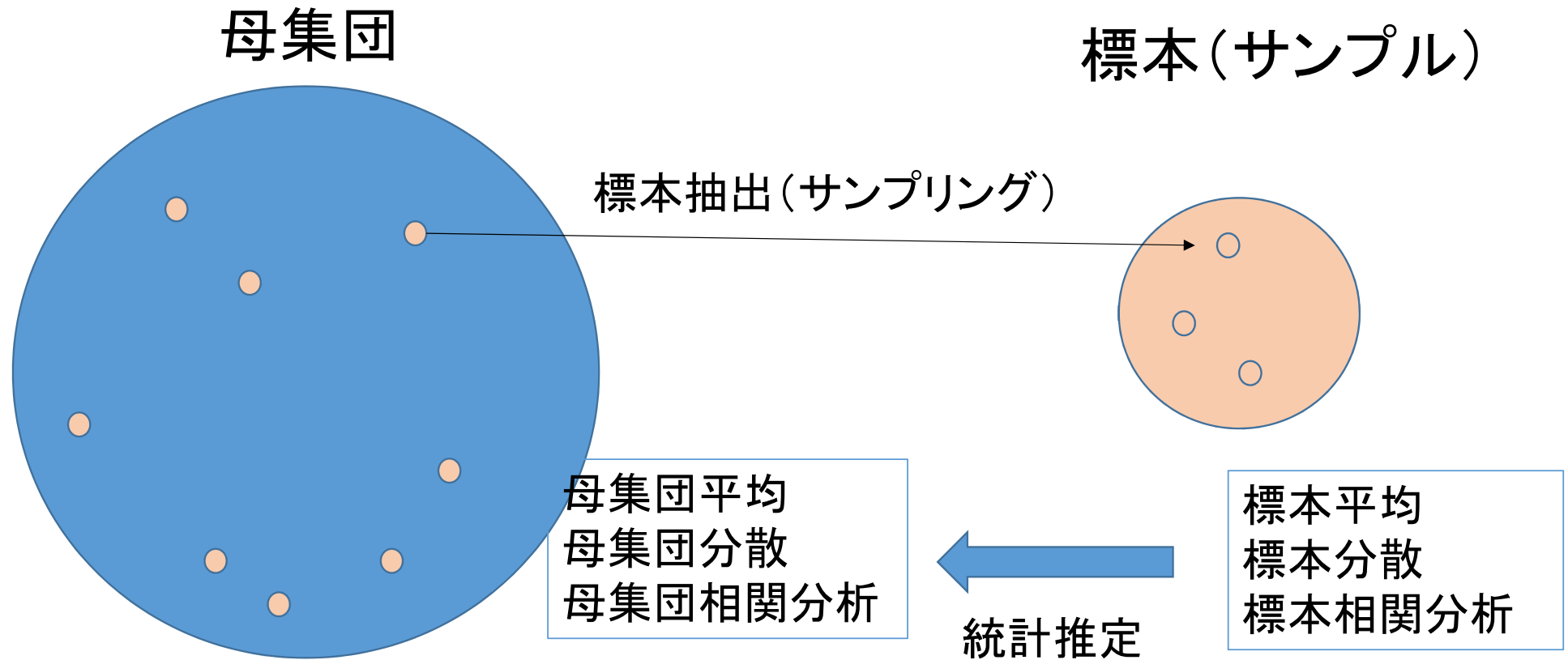
地区	測定値 (Bq/kg)	平均 (Bq/kg)
A	80, 100, 115	98
B	50, 65, 90	68

2. トマトの放射能濃度を350mL容器に入れて測定した。十分につぶして規定通りの330ml、330g詰めた。300秒測定したところ、Cs-137のピークとして150カウント(0.5cps(カウント/秒))を得た。EMF211のシステムでは350mL容器を使った場合、1cpsの計数率は170Bq/kgに相当する。これから比例計算すると試料は85Bq/kgとなる。このトマトは食品基準の「100Bq/kg以下」に適合すると言って良いか？

計測の目的とやり方をはっきりさせる

- 測定結果を見てどんなアクションの判断をするのか
食べる 出荷 改善の効果が出たか？
- 計測結果から適否の判断をする基準はあるか(作れるか)？
食品基準 100Bq/kg未満
- 信頼性をいくつにするか？ これも決めごと
100%確実な計測はない
正誤半々？(意味ない)
許容する誤りの危険性は5%以下？ 1%以下？
食品基準 測定値の分布の99%上限が基準値(100Bq/kg)未満
- 目的、判定基準、信頼性が決まって初めて測定の方法が決まる

母集団と標本



参考図書

- 森下武志 「計測と誤差」(データ処理と統計手法)

[https://www.cc.toin.ac.jp/sc/morishita/document/lecture_doc/Engineering_Workshop2\(measurement&error\)_textbook_2019.pdf](https://www.cc.toin.ac.jp/sc/morishita/document/lecture_doc/Engineering_Workshop2(measurement&error)_textbook_2019.pdf)

標本平均と分散

- 標本 X_1, X_2, \dots, X_n n 個

- 標本平均

$$m = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

- 標本分散(不偏分散)

データのばらつき程度を示す指標

平均からの距離をそのまま足し算すると

$$(X_1 - m) + (X_2 - m) + \dots + (X_n - m) \\ = X_1 + X_2 + \dots + X_n - nm = 0$$

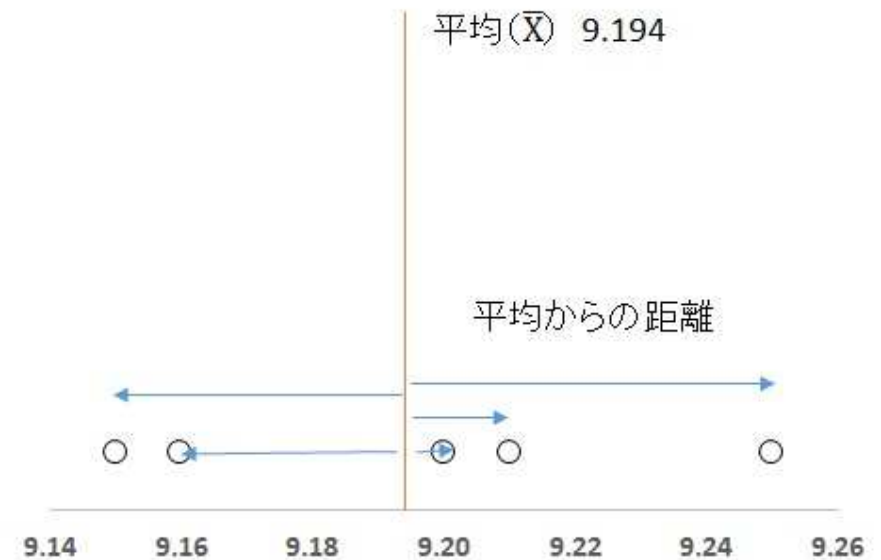
距離の2乗の総和を取り、 $n-1$ で割った値を(標本)分散と呼び、ばらつきの程度を表す

$$(\text{分散}) \quad s^2 = \frac{(X_1 - m)^2 + (X_2 - m)^2 + \dots + (X_n - m)^2}{n-1}$$

分散の平方根を標準偏差と呼ぶ

$$(\text{標準偏差}) \quad s = \sqrt{s^2}$$

標本	
データ番号	測定値
X1	9.16
X2	9.25
X3	9.15
X4	9.21
X5	9.20



$s^2 (\sigma^2)$	分散	0.00163
$s (\sigma)$	標準偏差	0.0404

実際の計算(EXCEL)

	A	B	C	D	E	F
1						
2		平均と分散				
3						
4	標本					
5	データ番号	測定値				
6	X1	9.16	1			
7	X2	9.25	1			
8	X3	9.15	1			
9	X4	9.21	1			
10	X5	9.20	1			
11						
12	=average(B6:B10)	9.194	平均 (average)			
13	=var(B6:B10)	0.00163	(不偏)分散 (variance)(/n-1)			
14	=stdev(B6:B10)	0.0404	標準偏差 (standard deviation)(/n-1)			

課題1にあてはめてみると

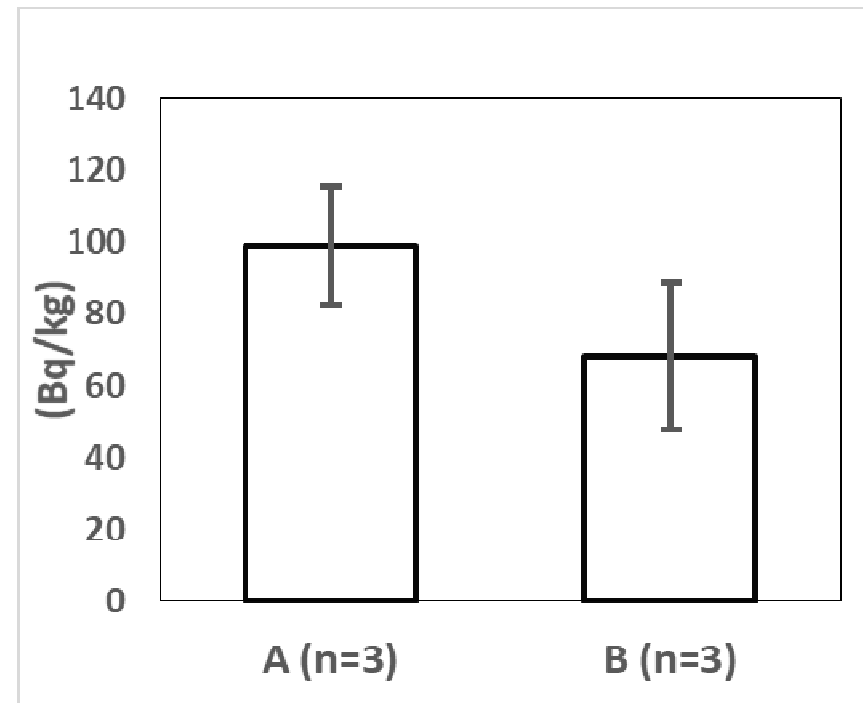
	A	B
	(Bq/kg)	(Bq/kg)
1	82	50
2	100	65
3	115	90
ave	99.0	68.3
stdev	16.5	20.2

放射能濃度

A: 99 ± 17 Bq/kg (n=3)

B: 68 ± 20 Bq/kg (n=3)

サンプル数



広告などで見られる例



誤差棒がない！

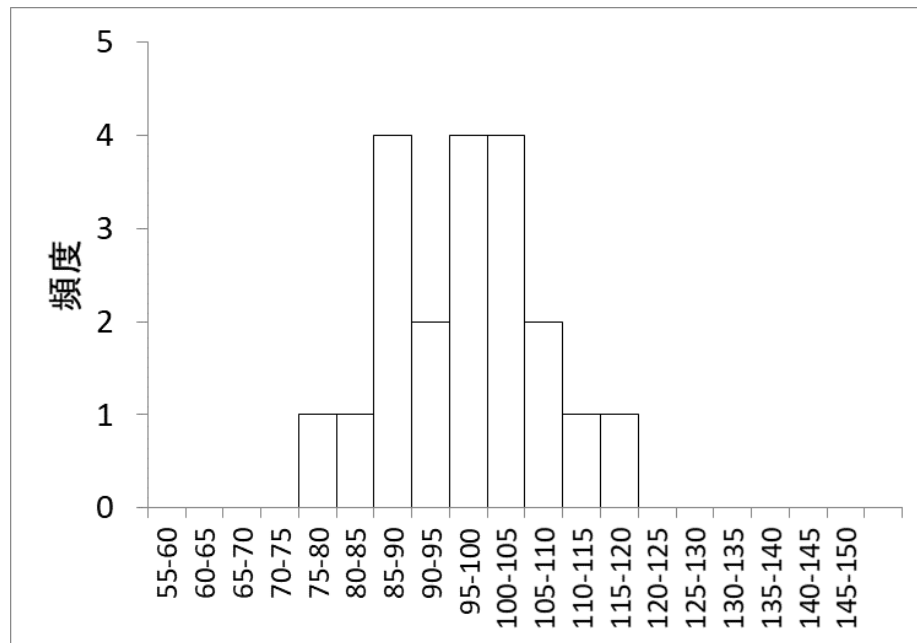
統計的な変動の範囲が
どうかが分からない

度数分布(ヒストグラム)、確率分布

- ある畑から20か所の土壌を取って放射能濃度(Bq/kg)を測定したところ下の結果を得た

97.4	112.1	88.7	102.7	108.7	94.7	100.8	100.6	119.3	98.4
89.1	76.6	105.4	104.3	98.8	84.4	98.8	89.5	85.0	92.8

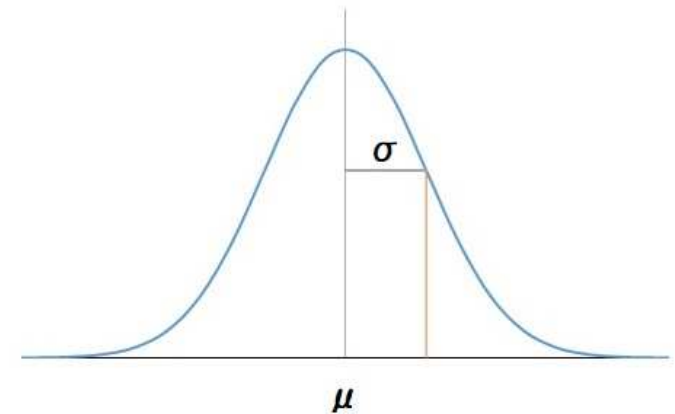
- 5Bq/kgごとの刻みで度数分布を作った



- 今回の測定では100Bq/kg近傍の土壌が多かった。また、75以下や120以上の土壌はなかった
- 同じ畑から無作為に土壌を取ると100Bq/kgぐらいの結果が得られる可能性が高いと期待される
- 発生頻度をサンプル数で割って全体が1になるように調整したものを確率分布と呼ぶ

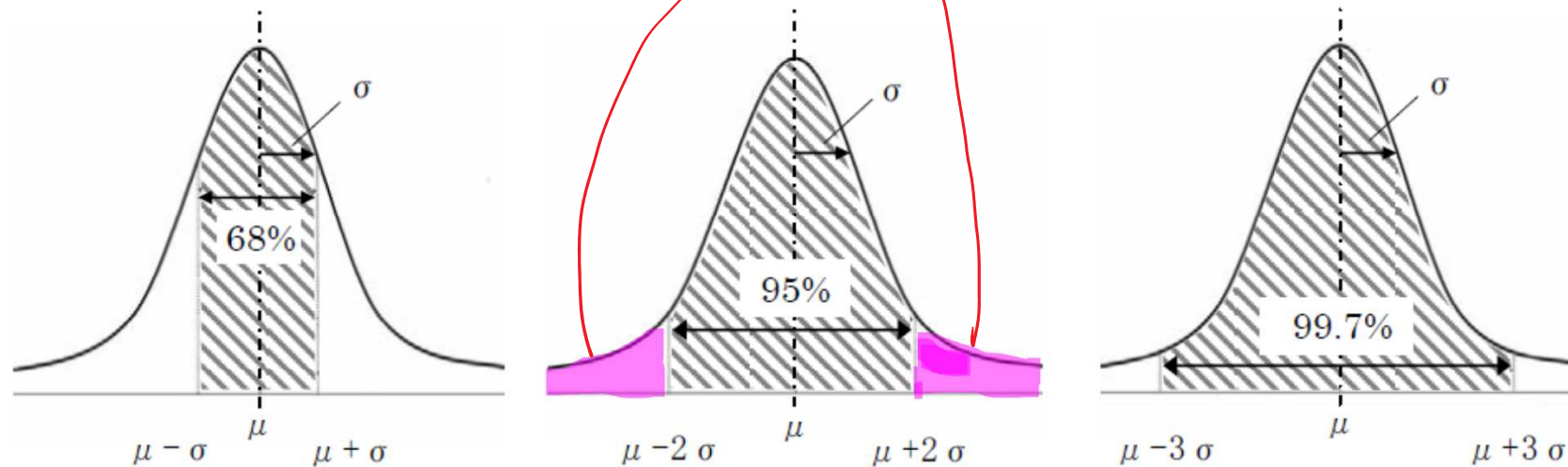
正規分布

- ・多くの偶然事象の確率分布は正規分布になることが知られている。
- ・正規分布にならない分布もある。所得分布とか。



正規分布の性質

両方合わせて5%
100回に5回

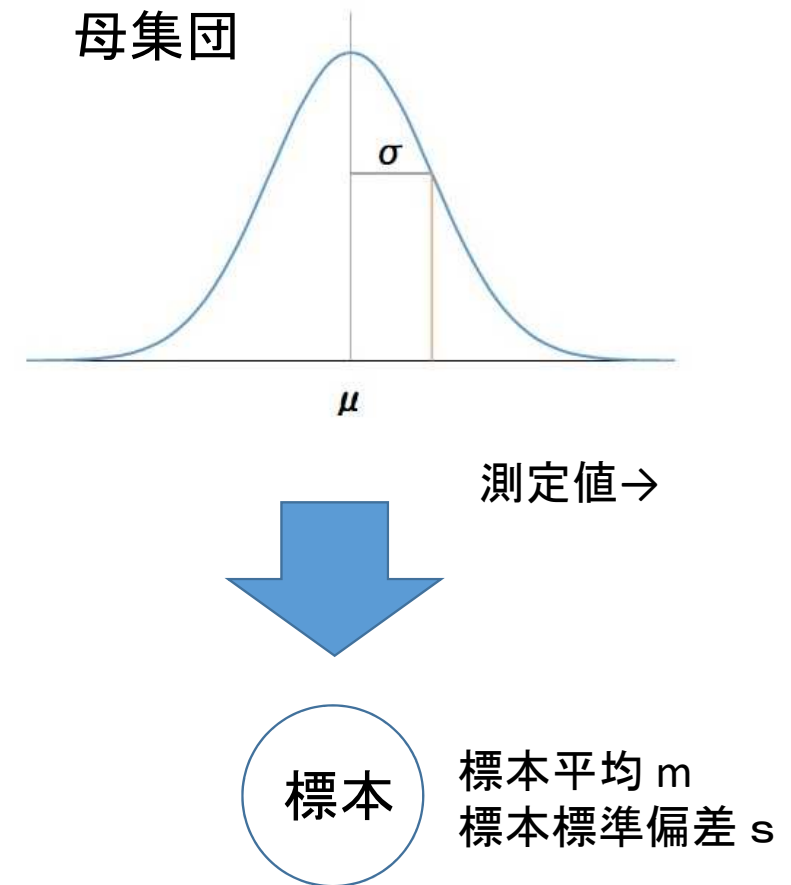


偏差値とは

- 試験成績などでよく使われる「偏差値」
- 試験の難易によって平均点が変わる。自分の得点だけでは得点分布の中でどの辺の位置にいるかが分からない
- 試験の得点の分布は正規分布になると仮定して、平均値を50点、標準偏差が10点になるように標準化する。
(方法)
- その試験を受けた**全員**の結果の平均を μ 、標準偏差を σ としたとき、得点 x の偏差値は、
偏差値 $Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \times 10 + 50$
- 偏差値50点=平均点。偏差値70点 2σ 離れているので上位2.5%

母集団の分布と標本の分布

- 測定対象の全集合(母集団)の平均を μ 、標準偏差を σ とする。
- 測定対象から標本(サンプル)を抽出し測定する。
- 母集団の σ がゼロでないとき、標本の測定値は揺らぎを持つ
- 1個ずつ標本を取り出すとき、測定値の期待値(平均)は μ 、標準偏差の期待値は σ になる



母集団 ($\mu=100$ 、 $\sigma=10$)から100個の標本を
ランダムに採った

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	97.0	86.4	98.2	98.7	101.7	111.4	94.9	93.9	110.6	88.2
2	97.4	112.1	88.7	102.7	108.7	94.7	100.8	100.6	119.3	98.4
3	89.1	76.6	105.4	104.3	98.8	84.4	98.8	89.5	85.0	92.8
4	90.7	103.1	105.5	91.9	89.1	94.1	99.4	94.9	93.1	95.6
5	114.5	91.6	110.8	82.2	94.6	110.0	102.0	95.9	103.7	123.5
6	102.0	75.8	92.0	98.1	114.2	107.0	98.1	103.1	102.6	94.5
7	97.8	74.7	117.4	115.7	112.3	105.1	90.5	90.9	102.6	102.6
8	82.4	88.7	91.0	101.8	108.9	100.4	97.3	88.9	92.4	99.0
9	93.9	104.1	90.3	93.3	100.7	74.2	81.9	95.4	106.3	93.7
10	112.5	91.6	107.1	95.6	107.3	112.6	113.9	106.2	105.0	100.7

標本平均(m)	98.5	(n=100)
標準偏差(s)	9.9	

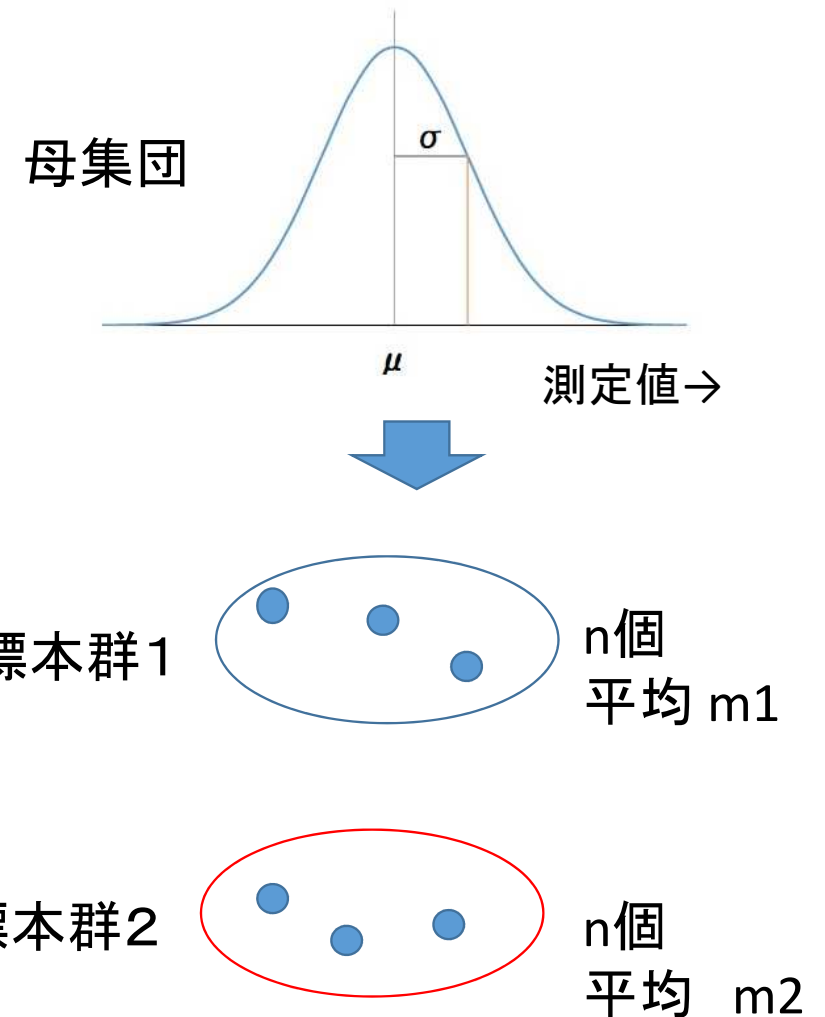
母集団の分布と標本平均の分布

(複数の要素を含む標本群のことも標本と呼ぶ)

- n個ずつ標本を取り出して標本とする
(サイズnの標本)
- N組の(標本の平均)の平均をMとする

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_N}{N}$$

- M(平均の平均)の期待値は μ
- 標本平均の標準偏差の期待値は $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

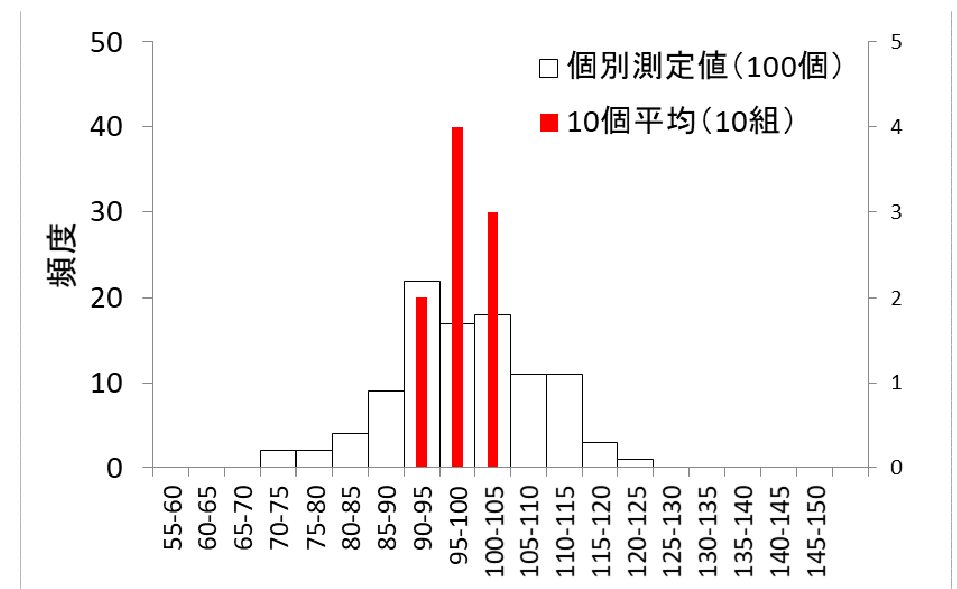


「期待値」とは <https://ja.wikipedia.org/wiki/期待値>

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	aveage	stdev
1	97.0	86.4	98.2	98.7	101.7	111.4	94.9	93.9	110.6	88.2	98.1	8.2
2	97.4	112.1	88.7	102.7	108.7	94.7	100.8	100.6	119.3	98.4	102.3	8.9
3	89.1	76.6	105.4	104.3	98.8	84.4	98.8	89.5	85.0	92.8	92.5	9.3
4	90.7	103.1	105.5	91.9	89.1	94.1	99.4	94.9	93.1	95.6	95.7	5.3
5	114.5	91.6	110.8	82.2	94.6	110.0	102.0	95.9	103.7	123.5	102.9	12.2
6	102.0	75.8	92.0	98.1	114.2	107.0	98.1	103.1	102.6	94.5	98.7	10.2
7	97.8	74.7	117.4	115.7	112.3	105.1	90.5	90.9	102.6	102.6	101.0	13.1
8	82.4	88.7	91.0	101.8	108.9	100.4	97.3	88.9	92.4	99.0	95.1	7.8
9	93.9	104.1	90.3	93.3	100.7	74.2	81.9	95.4	106.3	93.7	93.4	9.7
10	112.5	91.6	107.1	95.6	107.3	112.6	113.9	106.2	105.0	100.7	105.3	7.4
標本平均(m)	98.5	(n=100)						平均(n=10)の平均			98.5	9.2
標準偏差(s)	9.9							平均(n=10)の標準偏差			4.32	2.29

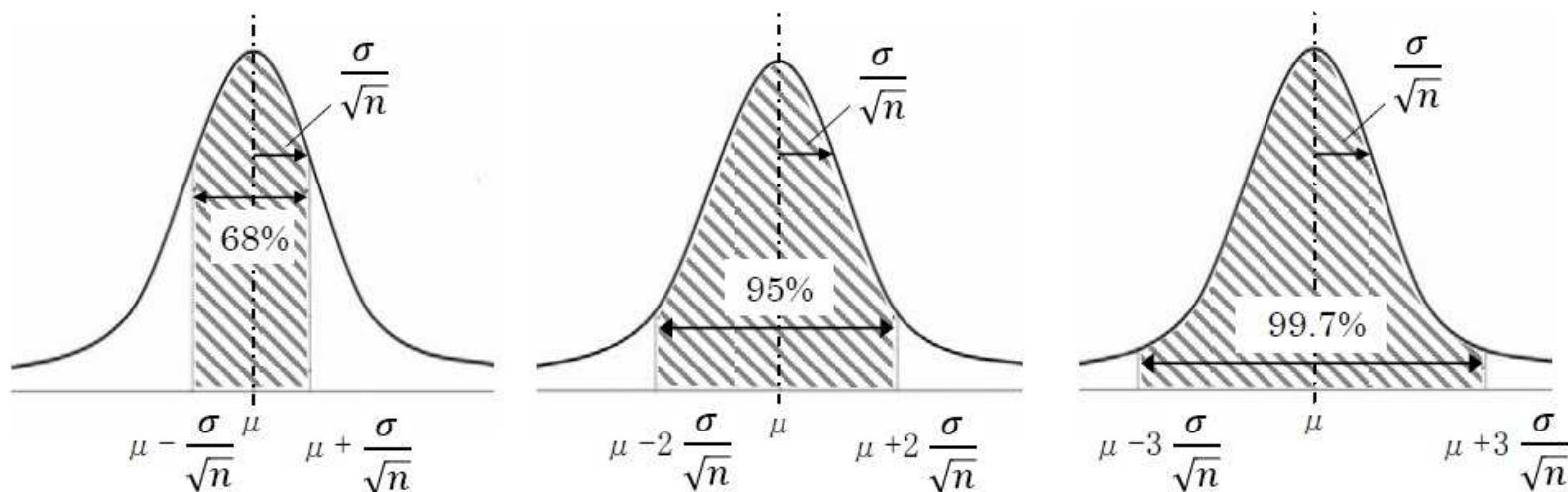
10個平均の分布

- ・標本10個の平均の分布は広がりが小さくなっている
- ・複数回計測して平均を取ると、母平均に近くなる確率が増える



<<区間推定>>

- 無作為に抽出したサンプルの平均、標準偏差から母集団の平均（母平均、あるいは真の平均ともいう）を推定する
- サイズ n の標本につき、標本平均の標準偏差は $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ だった。母集団の分布が正規分布の場合、標本平均 m の母平均 μ からのずれの存在範囲は、

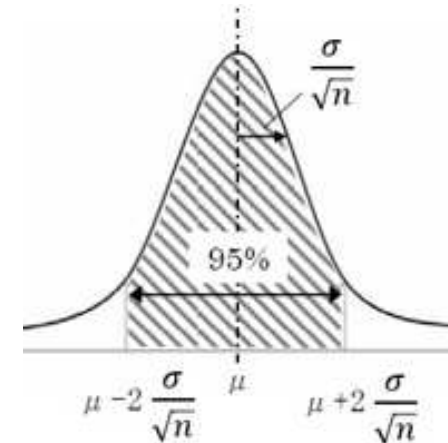


- μ を中心にして m の存在範囲のうち、例えば95%をカバーする範囲は

$$\mu - 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \mu + 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

この式を μ について整理すれば

$$m - 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < m + 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



- 95%を信頼性と呼ぶ。100回試すと95回は当たる。逆に言うと残りの5%は外れる可能性がある。5%の方を危険率と呼ぶ。
- 信頼性を99%にするには、係数を2.6にすればよい。

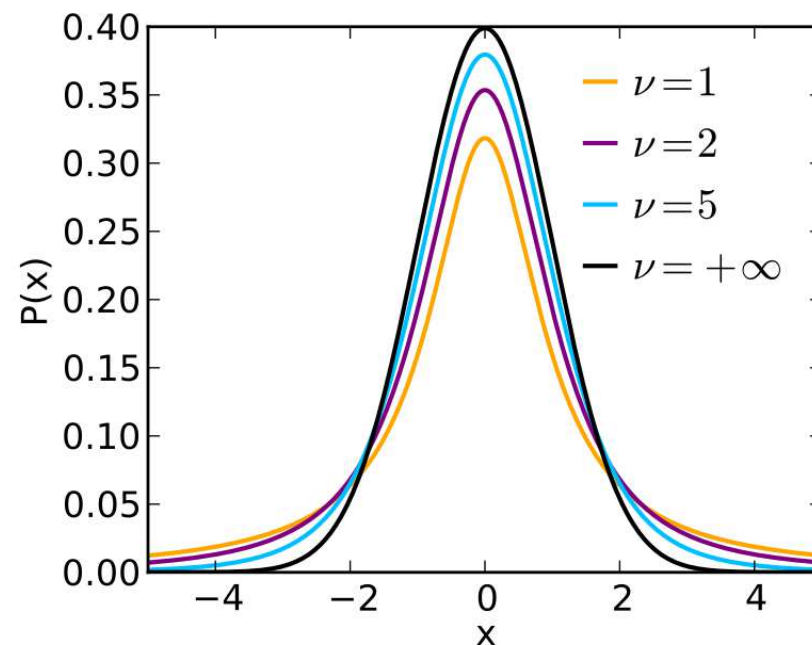
危険率 (α)	係数 (z)
0.01	2.576
0.02	2.326
0.05	1.960
0.1	1.645

正規分布で母分散が分かっている場合

区間推定（標本標準偏差を使う場合）

通常、母標準偏差 σ は分からないので、標本標準偏差 s を使って母平均の推定区間を求める

- 標本（サイズ n ）の標準偏差 s を使うと、標本平均 m の確率分布は自由度 $(n-1)$ の t 分布と呼ばれる分布になる。
- 正規分布よりすそが広がった分布になる
- n が大きくなると t 分布は正規分布に近づく（大体 $n > 30$ ）



t分布 (Wikipedia)

母平均の区間推定

- サイズ n の標本平均 m の分布範囲は、 t 分布に対して正規分布の時と同様に危険率 α に対して定まる係数 $t_{n-1,\alpha}$ を使って

$$\mu - t_{n-1,\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \mu + t_{n-1,\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- μ について整理すると

$$m - t_{n-1,\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < m + t_{n-1,\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

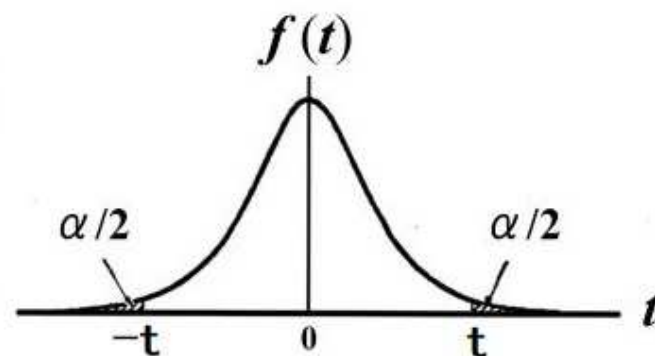
- $t_{n-1,\alpha}$ の代表的な値を次ページに示す

- EXCELでは $t_{n-1,\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$ を計算する関数が用意されている
confidence.t(α,s,n) α : 危険率、 s : 標本標準偏差、 n : 標本数

t表

$t_{n-1, \alpha}$

α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
n-1					
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878



課題1にあてはめてみる

母平均の95%信頼区間は

A: 58~140 Bq/kg

B: 18~119

<基準の適合性判定>

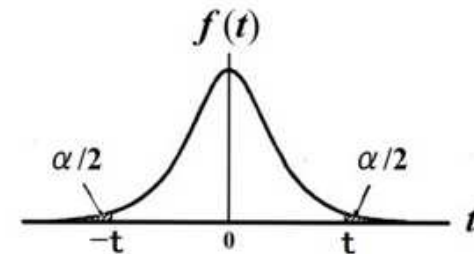
- ・A,Bが野菜だとする
- ・食品基準 母平均<100Bq/kg を99%以上の信頼性で満足する必要がある
- ・上側危険率1%なので両側では2%のt値
- ・B'の例のように

52±13 Bq/kg (n=3)

であっても母平均最大推定値が、102Bq/kgとなり、**基準不適合**

	A (n=3)	B (n=3)	B' (n=3)
n (Bq/kg)	(Bq/kg)	(Bq/kg)	(Bq/kg)
	82	50	40
	100	65	50
3	115	90	65
ave	99	68	52
stdev	17	20	13
信頼区間(両側)(95%)			
confidence.t(0.05, stdev, n)	41	50	
ave+conf.t	140	119	
ave-conf.t	58	18	
上限(片側信頼性99%)=(両側98%)			
confidence.t(0.02, stdev, n)	66	81	51
母平均最大推定値	165	150	102

X X X



一つの解決法

- 標本数を増やす
- $n=5$ で似たような分布が得られたとする
58 ± 19 Bq/kg ($n=5$)
- 母平均最大推定値 (99%) は 77 Bq/kg ∴ 基準適合

	C (n=5)
	n (Bq/kg)
	40
	45
	50
	70
	85
	5
ave	58
stdev	19
上限 (片側信頼性99%) = (両側98%)	
confidence.t(0.02, stdev, n)	32
母平均最大推定値	77

(限度) 基準を満たすとは

- 「標本平均や標本平均 + 標準偏差が基準値未満である」ではない
- 推定される母平均の最大値 (危険率 α) が基準値未満のとき適合と言える
- 平均値、標準偏差が同じでも危険率により推定最大値は変わる。サンプルの数でも変わる。

<<検定>>

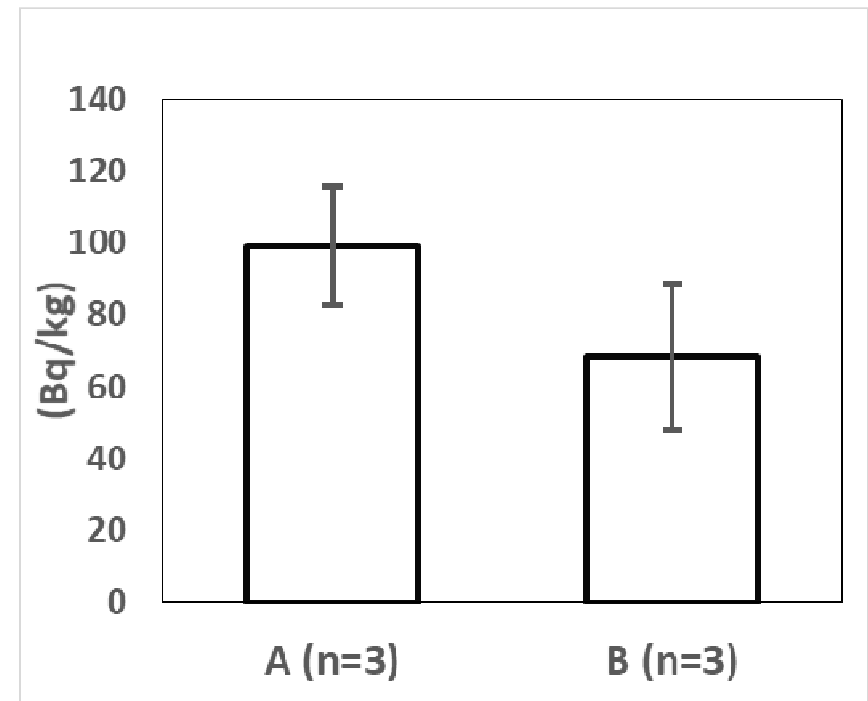
課題1のAとBには統計的な有意差があるのか？

	A	B
	(Bq/kg)	(Bq/kg)
1	82	50
2	100	65
3	115	90
ave	99.0	68.3
stdev	16.5	20.2

放射能濃度

A: 99 ± 17 Bq/kg (n=3)

B: 68 ± 20 Bq/kg (n=3)



有意差検定

- (仮説) 二つの母平均は等しい(差はない)
(取り出した標本の平均が偶然、差があるように見えるだけ)
- 計算
それぞれの平均値を m_A 、 m_B 標準偏差 s_A 、 s_B 標本のサイズ n_A 、 n_B とする

二つの標本の合同標準偏差 $\sigma_{AB} = \sqrt{\frac{s_A^2(n_A-1) + s_B^2(n_B-1)}{(n_A-1) + (n_B-1)}}$

$$\frac{m_A - m_B}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right) \sigma_{AB}^2}}$$

は母平均差 $\mu_A - \mu_B = 0$ (仮定より)、自由度 $n_A - 1 + n_B - 1$ の t分布になる。

20ページのt表を使って、 $m_A - m_B$ が限度外域(棄却域)にあるかで判定する

excelを使って t検定計算

t-検定: 等分散を仮定した2標本による検定		
	変数 1	変数 2
平均	99	68.33333
分散	273	408.3333
観測数	3	3
プールされた分散	340.6667	
仮説平均との差異	0	
自由度	4	
t	2.03492	
P(T<=t) 片側	0.055793	
t 境界値 片側	2.131847	
P(T<=t) 両側	0.111586	
t 境界値 両側	2.776445	

計算結果

	A (n=3) (Bq/kg)	B (n=3) (Bq/kg)
1	82	50
2	100	65
3	115	90
ave	99.0	68.3
stdev	16.5	20.2

- ・危険率5%での境界t値は2.77、二つの平均差のt値は2.03。境界以下なので仮説は棄却されない。有意差はない。
- ・P(境界確率)0.11なので、危険率10%でも有意差はない。

t 検定: 等分散を仮定した 2 標本による検定

入力元

変数 1 の入力範囲(1): \$D\$41:\$D\$43

変数 2 の入力範囲(2): \$E\$41:\$E\$43

仮説平均との差異(Y): 0

ラベル(L)

α (A): 0.05

出力オプション

出力先(O): \$G\$38

新規ワークシート(P):

新規ブック(W)

OK

キャンセル

ヘルプ(H)

EXCEL、t検定パラメータ設定

- 二つの林の杉の放射能濃度の統計的有意差はない

- 見た目での簡便判別 (かなりアバウト)

$n \leq 4$ 二つの結果の誤差棒がつながると有意差なし

$n \approx 10$ 平均値が相手の誤差範囲に入ると有意差なし

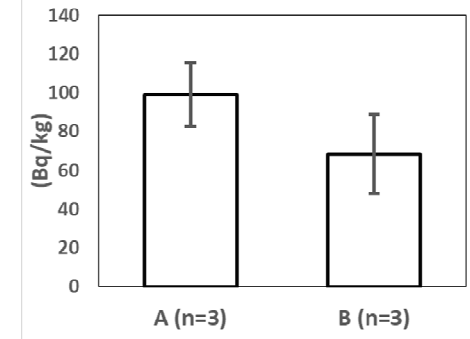
結論を出すときは、まじめに t 検定で確認



放射能濃度

A: 99 ± 17 Bq/kg (n=3)

B: 68 ± 20 Bq/kg (n=3)



- 危険率の取り方 学会・研究会発表や論文などでは5%をとることが多い。確率1/2が5回連続で起こるくらいの確率。

本当は差がないのに差があるという間違いを避けたいときには1%とすることがある。薬効とか治療効果とか。一方で効果があるのに見逃す率が増える。見逃すと命に関わる兆候とかビジネスチャンスを逃がすというときは危険率を低くすべきではない。

- 統計的有意差は決定的証拠ではない。危険率5%なら20回に1回、1%でも100回に1回は有意差あり。

- EXCELを使った t 検定。計算原理は複雑だがexcelでの処理は簡単。自分でもやってみてください

統計的な作話

- 疫学調査
ある国で疫病の地域性を調べる調査を行った。国内を10kmx10kmのメッシュに区切って、人口10万人当たりの発生率を調べた。A地区は危険率1%で統計的に有意に発生率が高かった。A地区の風土に原因があると考えられる。
- 薬効
食物由来成分100種を選んで様々な効果を調べた。成分Bは尿酸を下げる効果が統計的に有意に認められた。
- 競馬マル秘必勝法はこれだ！！ 素人でもこうして競馬で儲けられる♪

有意差なしとは

- 「二つのグループが同じである」という事ではない
- 二つのグループは違うかもしれないが、その時の標本の違いは偶然の違いかもしれない、ということ
- 違いを大事にしたいときは検定力を上げること
サンプルの数を増やすことで達成できる可能性がある

$$\mu - t_{n-1,\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \mu + t_{n-1,\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

標本のサイズを5にして同じ結果 が得られたとすると

放射能濃度

A: 99 ± 17 Bq/kg (n=5)

B: 68 ± 20 Bq/kg (n=5)

危険率5%で有意差ありとなる。

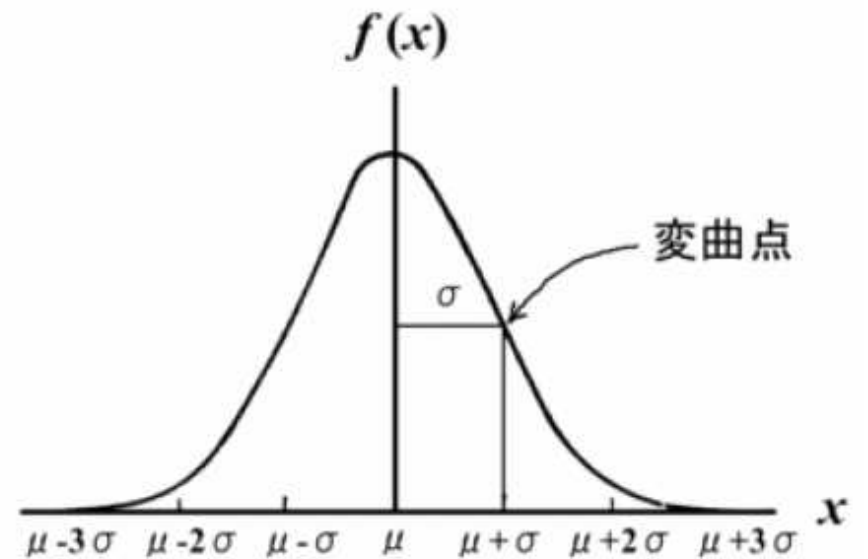
	変数 1	変数 2
平均	98.8	69
分散	272.7	405
観測数	5	5
プールされた分散	338.85	
仮説平均との差異	0	
自由度	8	
t	2.559661	
P(T<=t) 片側	0.016832	
t 境界値 片側	1.859548	
P(T<=t) 両側	0.033665	
t 境界値 両側	2.306004	

- ・濃度99が68になること、30%減が重要であるときはそれを検証できるだけの標本サイズを設定する必要がある。
- ・計測仕様(標本サイズなど)は説明したい事実に応じて定められる

補足

正規分布

確率密度関数：
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



標本分散

- 標本分散(不偏分散)

$$s^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n-1}$$

(注意)

以前は(高校数学は今も) 標本分散を $\sigma^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n}$ としているものが多い。用語が混乱している。

EXCELの統計計算関数 stdev()、stdev.s()は $1/(n-1)$ 、stdev.p()は $1/n$
関数電卓の統計計算キーは機種による。

- 詳しい説明は奥村晴彦(三重大)の[分散と標準偏差の解説](https://oku.edu.mie-u.ac.jp/~okumura/stat/basics.html)

<https://oku.edu.mie-u.ac.jp/~okumura/stat/basics.html>

EXCELで統計分析をする手順

- エクセルで分析ツールを読み込む方法
一度も分析ツールを使ったことのない人は設定が必要
https://udemy.benesse.co.jp/marketing/howto/excel_analyse.html
- confidence.t 関数
confidence.t 関数を説明するほとんどのサイトは誤った説明をしているので注意
https://kenkou888.com/category13/演習問題_信頼区間の推定.html
<http://www.statlit.org/pdf/Excel2013-Create-Confidence-Intervals-Slides.pdf>
英文の実施例。詳細な説明。 pdf文書 あり。
- t検定使用法
<https://udemy.benesse.co.jp/office-enhance/microsoft-office/t-test-excel.html>
「t 検定: 等分散を仮定した2標本による検定」の項を参照