

放射線計測における統計 (2)

2020年5月27日

高橋 正二

課題

1. A、B地区の杉の木の放射能濃度を3本ずつ測定して次の結果を得た。B地区のスギの方が低いと言えるか？

地区	測定値 (Bq/kg)	平均 (Bq/kg)
A	80, 100, 115	98
B	50, 65, 90	68

2. トマトの放射能濃度を350mL容器に入れて測定した。十分につぶして規定通りの330ml、330g詰めた。300秒測定したところ、Cs-137のピークとして150カウント(0.5cps(カウント/秒))を得た。EMF211のシステムでは350mL容器を使った場合、1cpsの計数率は170Bq/kgに相当する。これから比例計算すると試料は85Bq/kgとなる。このトマトは食品基準の「100Bq/kg以下」に適合すると言って良いか？

出現数に関する統計

- Cs-137, 10Bqの線源
平均すると1秒間に10個崩壊する放射能
- 実際に崩壊した1秒ごとの数を数えると、毎回10個丁度にはならず9個であったり11個であったり10個の周りに分布する
- 放射線をカウントしているときも平均すると1秒間に1回の1cpsでもメトロノームのような定期的な刻みではない

サーベイメータ音 (約1cps)



←をクリックして再生ボタン
(▶)を押すと放射線の検知
音が聞こえる。
平均すると1秒間に1回だ
がランダムな事象なのでポ
アソン分布に従うピッピッ音
である
(注: pdfファイルにはサウ
ンドはありません。ご了解
を)

ポアソン分布

- たくさんの要素をもつ集合から小さな確率で出現する事象があり、出現数の平均値が一定の値を持つとき、出現数の分布はポアソン分布となる
- Cs-137, 10Bqの線源
平均すると1秒間に10個崩壊する放射能

10BqのCs-137の原子核の数 14,000,000,000個(140億個)

$$N = A \frac{T_{1/2}}{0.693}$$

N: 原子核の数(個)、 A:放射能(Bq)、 $T_{1/2}$: 半減期(秒)

ポアソン分布となる例

- 放射能10Bqがあるとき1秒間に崩壊する数
- 放射線を検知しているとき平均1cpsの環境で、1秒間のカウント数
- 平均1cpsの環境で10秒間(平均10カウント)のカウント数の分布
- 新型コロナウイルスで東京都1400万人中1日の新規感染者数
- 日本人1億2千万人から500人を無作為に抽出し、賛成の数が250人

ポアソン分布の性質

- 関数形

平均値が μ のポアソン分布で k 個が出現する確率

$$\text{Poisson}(\mu, K) = \frac{\mu^K e^{-\mu}}{K!}$$

ここで、

μ は実数(≥ 0)。少数でも可。平均2.5回はある。

K は整数(≥ 0)。出現数なので2.5回というのはない。0回はある。

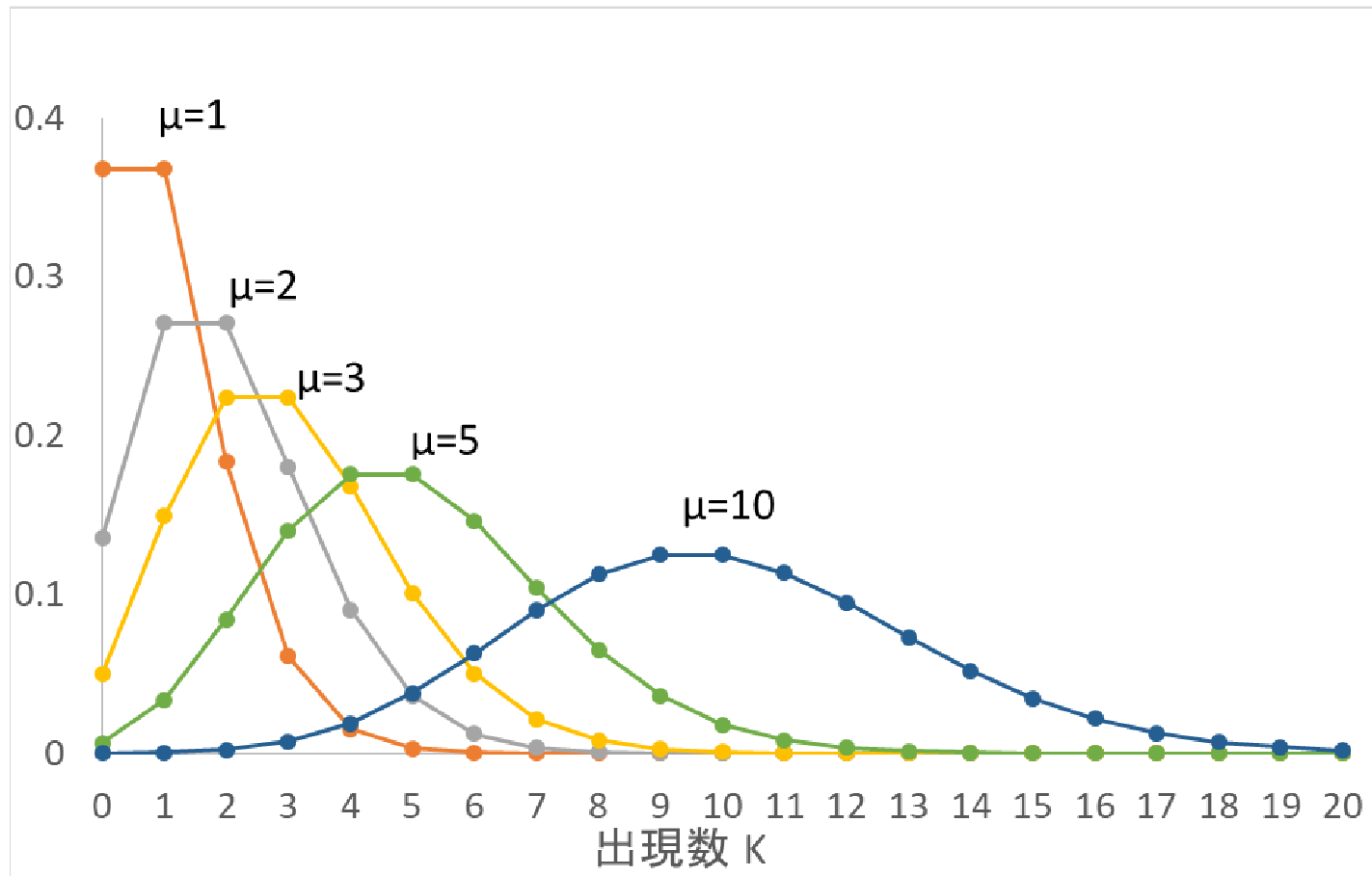
- 分散

ポアソン分布では分散 $\sigma^2 = \mu$

元の集団の個数に関係なく出現数の平均値(期待値)のみで決まる
(説明は補足参照)

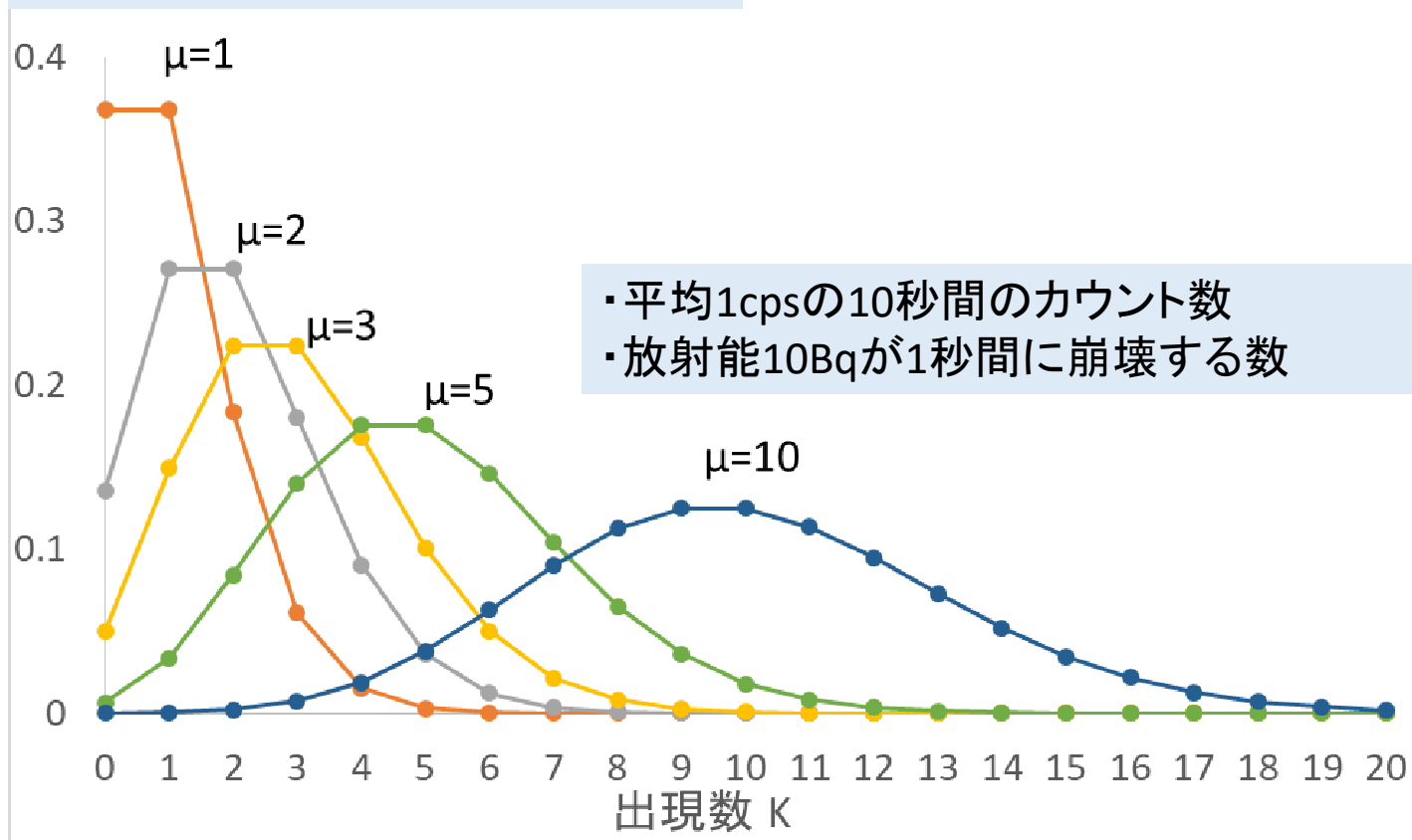
ポアソン分布

- ・平均値 μ が小さいところでは右にすそ野を引いた分布
- ・ μ が10くらいになるとほぼ左右対称



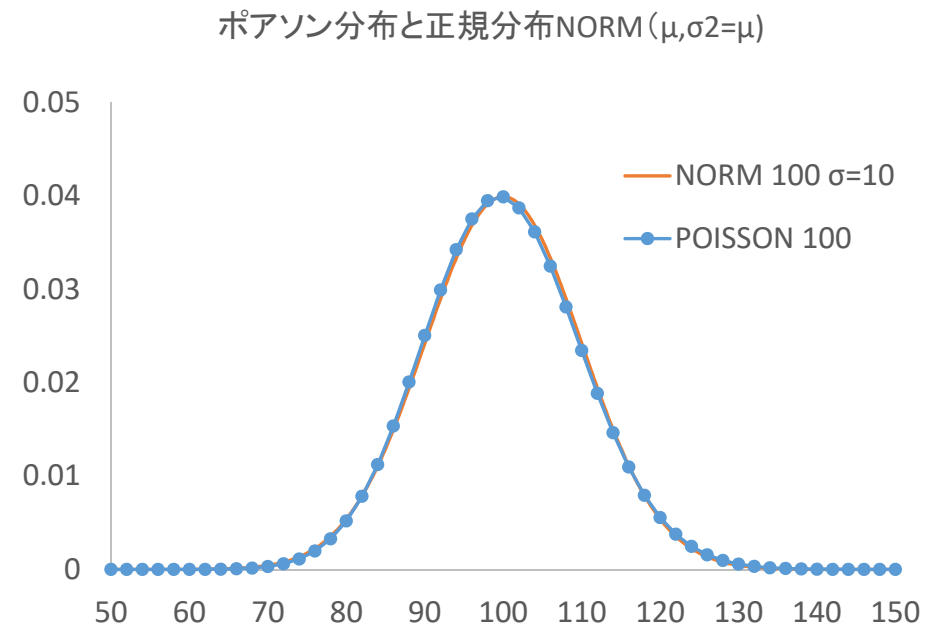
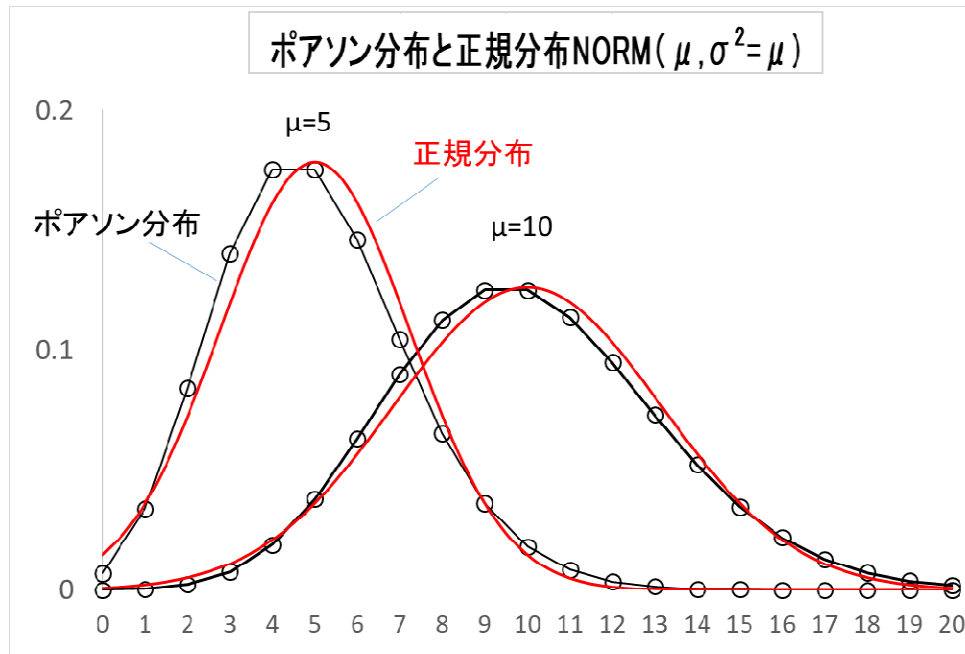
ポアソン分布の事例

平均1cpsの放射線の1秒間のカウント数



ポアソン分布と正規分布

- μ が大きくなるとPoisson(μ, K)は、正規分布【平均値 μ 、分散 μ (標準偏差 $\sqrt{\mu}$)】に近づく



【区間推定】

1回のトライアル(試行)結果からその事象の平均出現数を推定する

- 1回の試行結果の出現数をK個とする。
1秒当たりのカウントでも、10,000人中の当選者数でも構わない
- 期待される出現数平均はK個
- 期待される標準偏差は $\sqrt{K}$
- $K \geq 10$ くらいであれば分布は、ほぼ正規分布 $K \pm \sqrt{K}$
- 95%信頼区間は $K - 2\sqrt{K} \sim K + 2\sqrt{K}$

危険率(α)	係数(z)
0.01	2.576
0.02	2.326
0.05	1.960
0.1	1.645

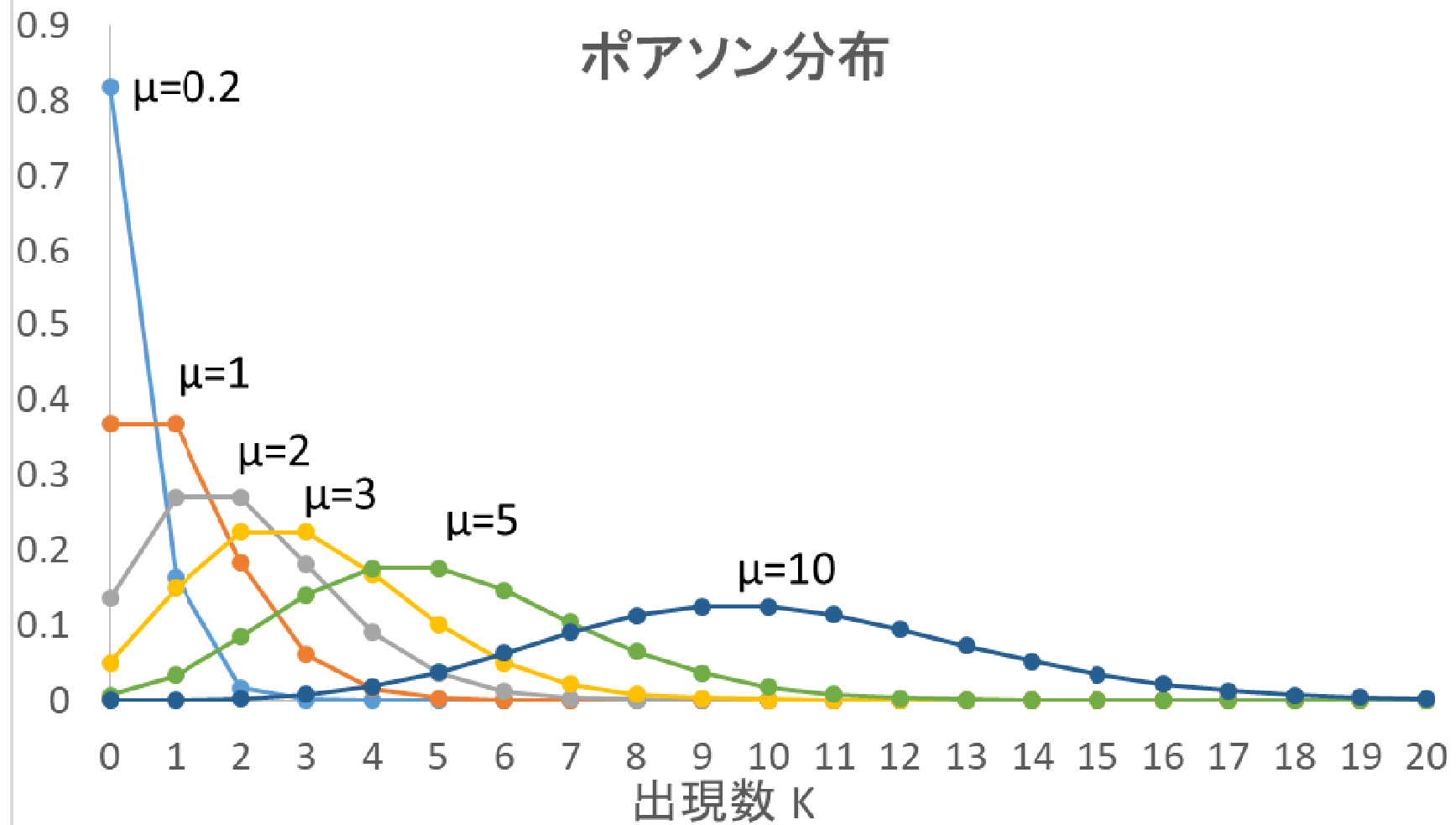
正規分布

ポアソン分布の信頼区間(出現数が少ないとき)

カウント数	期待値の68%信頼区間		期待値の95%信頼区間	
	下限	上限	下限	上限
0	0	1.841022	0	3.688879
1	0.172754	3.299527	0.025318	5.571643
2	0.708185	4.63786	0.242209	7.224688
3	1.367295	5.918186	0.618672	8.767273
4	2.085661	7.162753	1.089865	10.24159
5	2.840309	8.382473	1.623486	11.66833
6	3.620069	9.583642	2.201894	13.05947
7	4.41853	10.77028	2.814363	14.42268
8	5.231614	11.94514	3.453832	15.76319
9	6.056539	13.1102	4.115373	17.0848
10	6.891306	14.26695	4.795389	18.39036

瀬戸雄介、ポアソン分布の信頼区間、http://pmsl.planet.sci.kobe-u.ac.jp/~seto/?page_id=611&lang=ja

ポアソン分布



ポアソン分布に従う計測値の標準偏差 (Nが大きいとき)

- 測定結果がN個のとき、計測値 y が変換係数 f を使って

$$y=fN$$

で与えられる場合

- 計測値は、

$$Y: f(N \pm \sqrt{N}) = fN \pm f\sqrt{N} = fN \pm fN/\sqrt{N} = y \pm y/\sqrt{N} \quad (\pm 1\sigma)$$

計測結果が80Bq/kgのとき

$$80 \pm \sqrt{80} \text{ Bq/kg} \quad \dots \dots \text{誤り}$$

$$80 \pm 80/\sqrt{N} \quad (\text{正}) \quad N \text{は計測結果のカウント}$$

計算例1(課題2)

- トマトの放射能濃度を350mL容器に入れて測定した。十分につぶして規定通りの330ml、330g詰めた。300秒測定したところ、Cs-137のピークとして150カウント(0.5cps(カウント/秒))を得た。EMF211のシステムでは350mL容器を使った場合、1cpsの計数率は170Bq/kgに相当する。これから比例計算すると試料は85Bq/kgとなる。このトマトは食品基準の「100Bq/kg以下」に適合すると言って良いか？
- 300秒測定、150カウント $\Rightarrow$ 0.5cps
cpsからBq/kgへの変換係数は170Bq/kg/cps
試料の放射能濃度は $170 \times 0.5 = 85 \text{ Bq/kg}$

カウント誤差(標準偏差)

$$150 \text{ カウント} \Rightarrow \sigma = 85 / \sqrt{150} = 7 \text{ Bq/kg}$$

98%信頼区間(片側1%)

$$85 \pm 2.33 \times 7 = 85 \pm 16$$

最大値が100を超えるので基準不適合

- 対応策
 - 1) 再度測定して推定最大値が100以下だったら適合にする $\Rightarrow$ X 捏造
 - 2) 精度を上げる 1,200秒測定、600カウントだったとすると、 σ は1/2になり3.5
 $85 \pm 2.33 \times 3.5 = 85 \pm 8$ 基準適合

計算例2

- 日本人1億2千万人から500人を無作為に抽出し、賛成の数が250人
賛成の割合 $250/500=50\%$
標準偏差 $\sigma=50/\sqrt{250}=3\%$
95%信頼区間 $50 \pm 2 \times 3 = 50 \pm 6\%$ 5%の差は誤差のうち
アンケートと投票の違いに注意
アンケート 部分的なサンプルの結果から全体を推定する(幅がある)
投票 全員(棄権も含めて)の結果であるから推定ではなく確定(幅はなし)
- 東京都の1日の新たな感染者は5人だったとき、状況が変わらないとして平均値の推定範囲は？
少ない出現数のポアソン分布の表から95%信頼区間は、
1.6～12 人/日
(思ったより平均値が大きい可能性もある)

【EMF211による放射能測定】

ーバックグラウンドと誤差の取り扱いー

EMF211放射能濃度測定(SBI502)

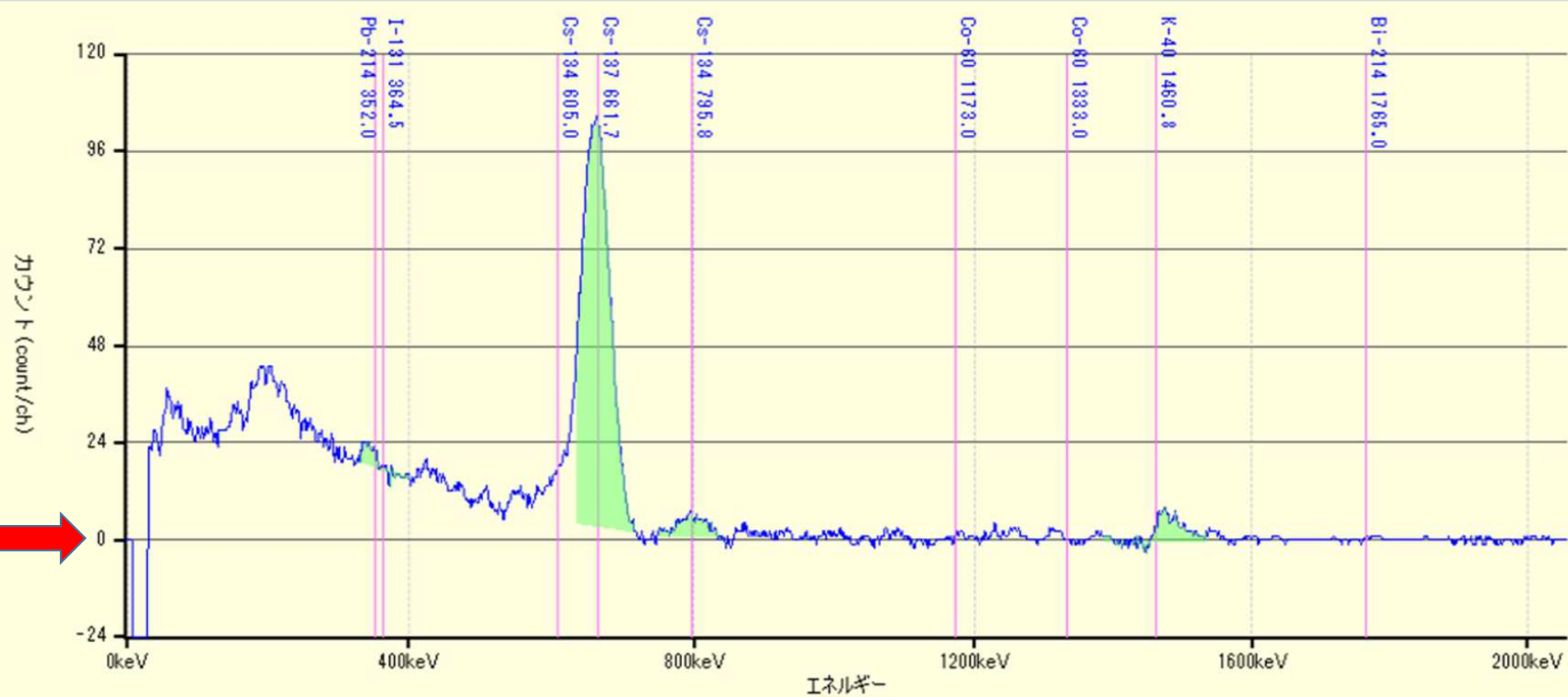
〈試料情報〉

名称	佐須 1
採取日時	2020/05/15 08:03
採取地	佐須
試料番号	
質量	106.1 g
密度	1.179 g/cm ³
担当者	矢野
備考	
容器タイプ	U8容器(90mL充填)

〈分析条件〉

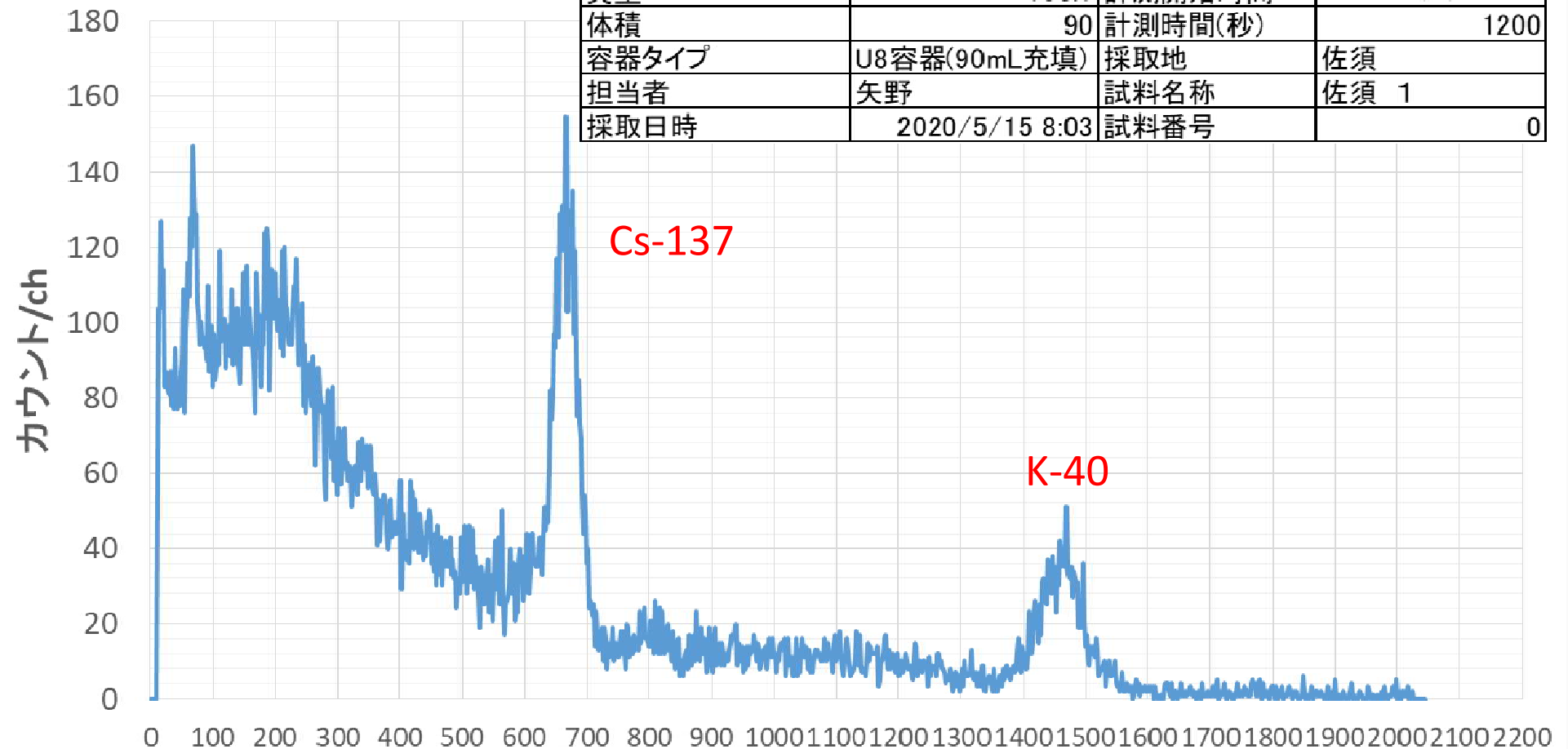
計測日時	2020/05/16 06:10:36
計測時間	1200 秒
移動平均処理	10ch(20keV)
BG計測日時	2020/05/15 15:40:31
BG計測時間	43200 秒
減衰補正	なし。測定時の放射能濃度を表示
質量補正	あり

核種名	エネルギー (keV)	ネットレート (cps)	放射能濃度 ±不確かさ(3σ) (Bq/kg)	測定下限値(3σ) (Bq/kg)	判定
Cs-合計	----	2.007	715.97±55.64	単純合計 51.44	検出
I-131	364.5	0.000	測定下限値未満	22.29	不検出
Cs-137	661.7	1.910	675.75±48.28	24.56	検出
Cs-134	795.8	0.097	40.22±27.65	26.88	検出
K-40	1460.8	0.099	測定下限値未満	500.31	不検出



EMF211が測定したエネルギースペクトル

測定スペクトル(生データ)



BGデータ

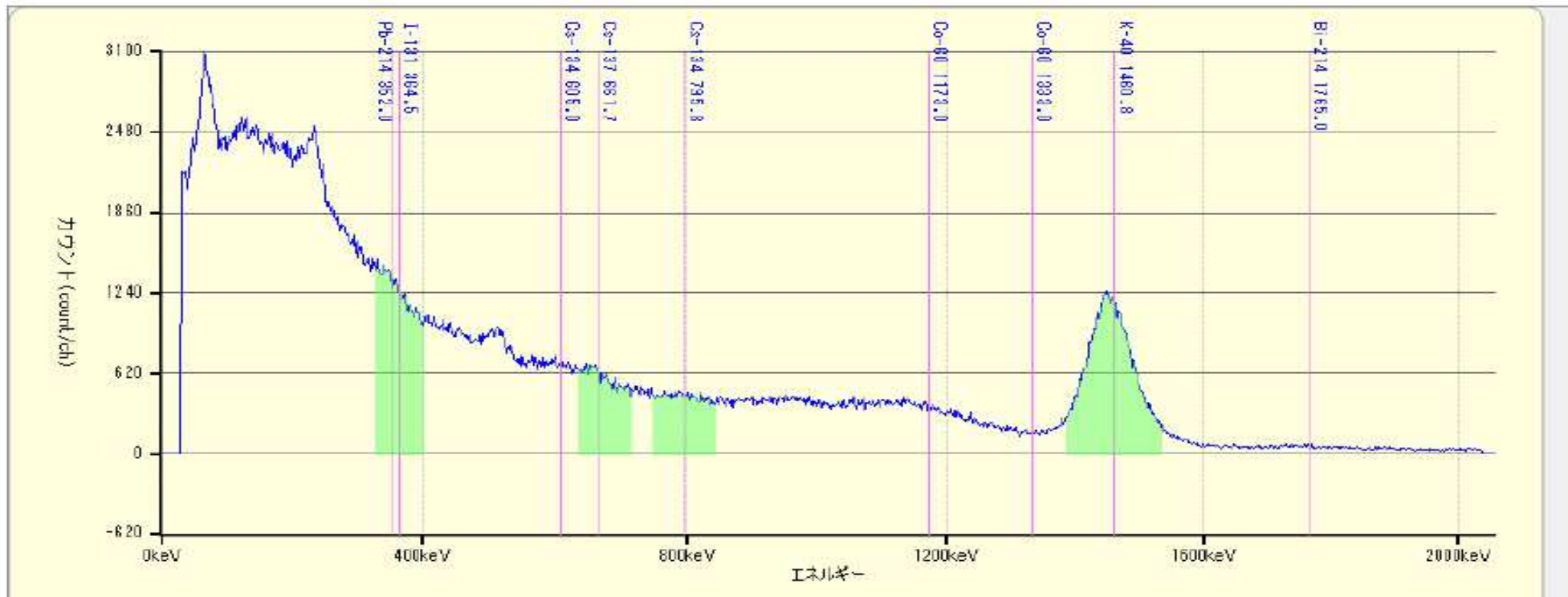
- ・測定器に何も入れずに測定したときの結果
- ・Cs-137の計数範囲にカウントがある

<計測情報>

容器タイプ	: U8容器(90mL充填)
計測日時	: 2020/05/15 15:40:31
計測時間	: 43200 秒
計測対象	: 水
備考	:

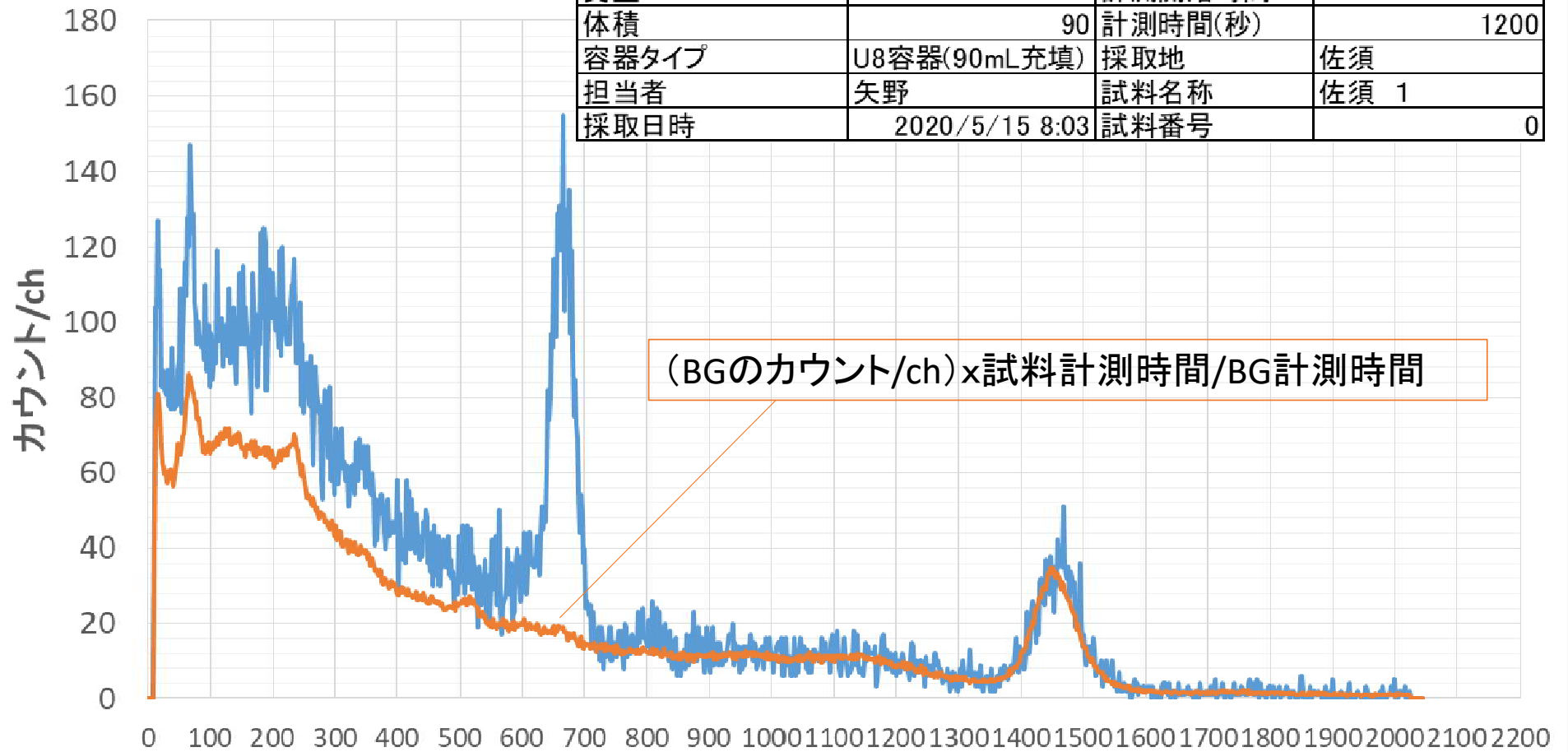
<ネットレート>

Cs-合計 (cps)	I-131 (cps)	Cs-137 (cps)	Cs-134 (cps)	K-40 (cps)
1.036	1.079	0.557	0.479	1.219



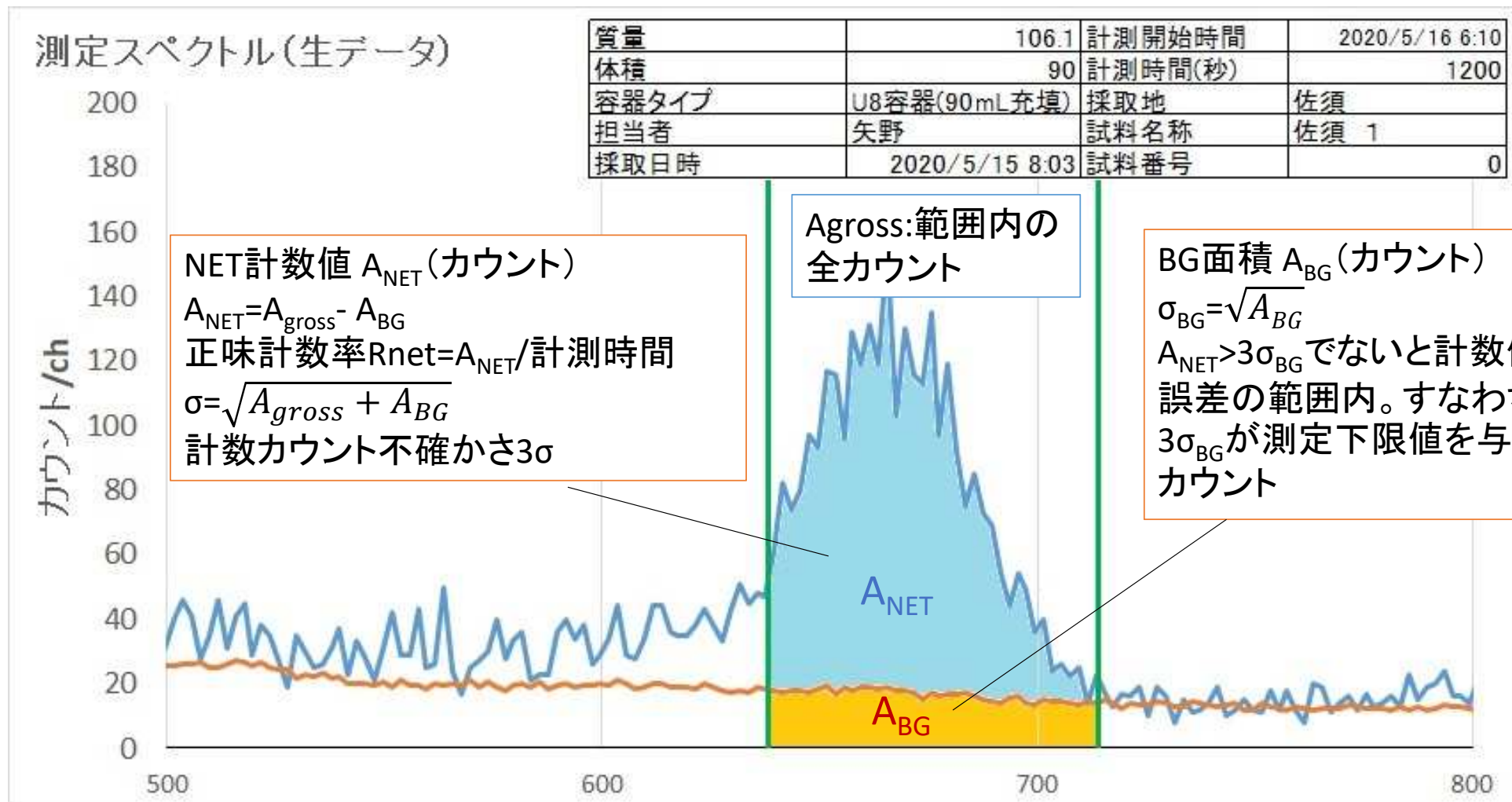
BGを差し引く

測定スペクトル(生データ)



ピーク面積の計算と不確かさ

厚労省、食品中の放射性セシウムスクリーニング法(2012年)では不確かさを 3σ としている



分布同士の加減算

(ポアソン分布でなくても成立)

- 分布 $A=m_A \pm \sigma_A$ 、分布 $B=m_B \pm \sigma_B$ のとき

定数 k 倍 $kA = km_A \pm k\sigma_A$

$A+B$ $A+B = m_A + m_B \pm \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$

$A-B$ $A-B = m_A - m_B \pm \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$

引き算でも分散は足し算

AXB $AXB = m_A m_B \pm m_A m_B \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{m_A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{m_B}\right)^2}$

A/B $\frac{A}{B} = \frac{m_A}{m_B} \pm \frac{m_A}{m_B} \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{m_A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{m_B}\right)^2}$

核種名	エネルギー (keV)	ネットレート (cps)	放射能濃度 ±不確かさ(3σ) (Bq/kg)	測定下限値(3σ) (Bq/kg)	判定
Cs-合計	-----	2.007	715.97±55.64	単純合計 51.44	検出
I-131	364.5	0.000	測定下限値未満	22.29	不検出
Cs-137	661.7	1.910	675.75±48.28	24.56	検出
Cs-134	795.8	0.097	40.22±27.65	26.88	検出
K-40	1460.8	0.099	測定下限値未満	500.31	不検出

- 100mL、U8容器に90mL、90gの水試料(標準形態)の場合のCs-137の変換係数 417Bq/kg/cps
- 今回の試料、106.1gに対してなので密度比(1.179)で割って、変換係数は 354Bq/kg/cps

EMF211測定ソフトの詳しい説明はEMFジャパン作成の「放射能測定ソフト取扱説明書」を参照のこと

注意

- EMF211の測定では、試料の体積や重量が標準以外だと幾何学的配置や線源の自己吸収の補正が必要だがEMF211のシステムでは提供されていない。必要に応じて自分で計算する
- 平均値のように動かしようのない値に比べて、統計的处理に基づく推定最大値は統計モデルや信頼水準の取り方で変化する。恣意的操作が入り込まないよう統計処理や合否判定の考え方(ポリシー)を明示する必要がある。
(参考:厚労省「食品中の放射性セシウムスクリーニング法」(2012年)、
<https://www.mhlw.go.jp/stf/houdou/2r985200000246ev-att/2r985200000246iu.pdf>)

お疲れ様でした



補足

二項分布とポアソン分布

- 成功する確率 p の事象を n 回繰り返した時、成功回数が k 回の確率 $\text{Bin}(n, p, k)$ は、

$$\text{Bin}(n, p, k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

- 二項分布の平均 μ 、分散 σ^2

$$\mu = \sum_{k=0}^n k {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} = np$$

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^n (k - \mu)^2 {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} = np(1-p)$$

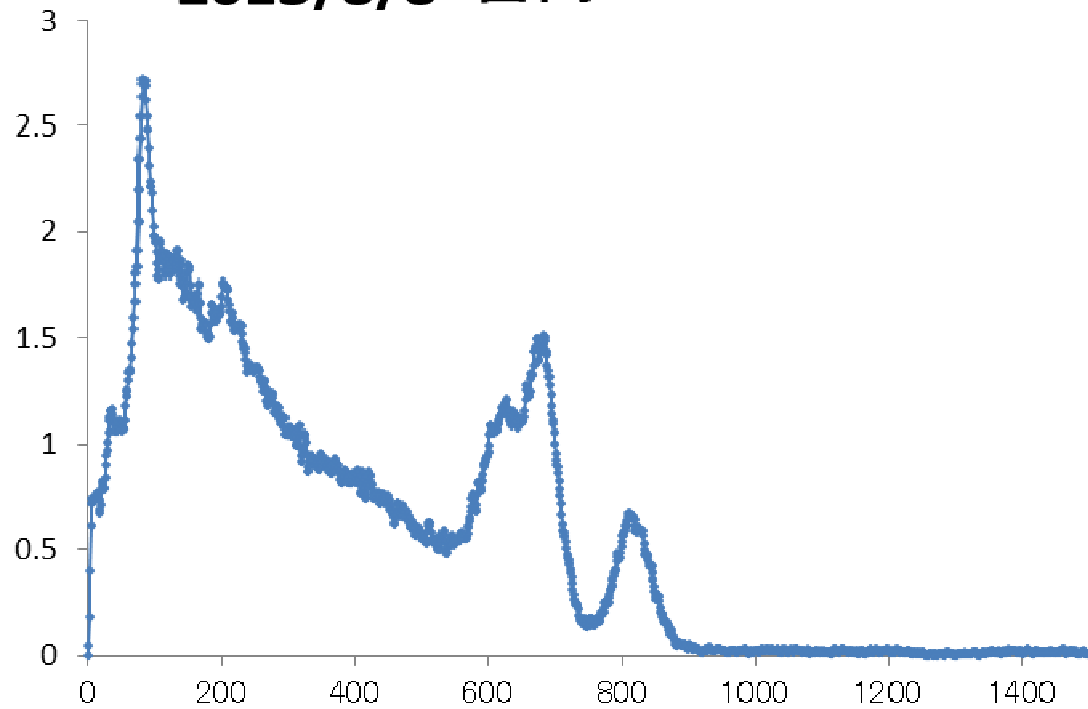
- ポアソン分布

$\mu = np$ の条件の下で、 $n \rightarrow \infty$ の極限をとる

$$\sigma^2 = np(1-p) = \mu \left(1 - \frac{\mu}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$$

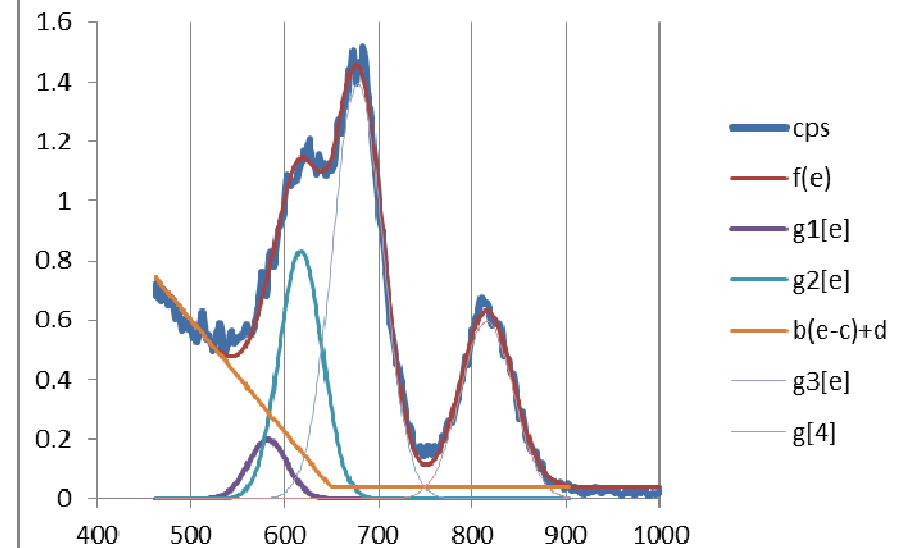
ピーク面積範囲が一部切れている理由

2013/8/8 富岡 2" Pb S92 0 cm



・Cs-134のピークが一部重なるため

富岡 2" Pb S92 0 cm



卒業試験？

- 放射線の計数をしたところ、4秒間で100カウントだった。
計数率(cps)、1秒間の平均カウント数として正しいのはどちらか？

① 25 ± 5 (標準偏差は 1σ で表記)

② 25 ± 2.5